Prof. Dr. Alfred Toth

Zahlentheoretische Definition der Zeichenrelation

1. Bereits 1975 hatte Bense den Versuch unternommen, die Isomorphie der numerischen Werte der drei peirceschen Universalkategorien Z = (1, 2, 3) und der natürlichen Zahlen mit Hilfe der Peano-Axiome zu beweisen (vgl. Bense 1975, S. 168 ff.). Allerdings geht er dabei von einer Variante der Peano-Axiome aus, welche nicht von 0, sondern von 1 als Basiszahl ausgeht. Einige Jahre später erlaubt ihm diese Entscheidung, die Universalkategorien als "Primzeichen" einzuführen (vgl. Bense 1981, S. 17 ff.). Dabei geht es jedoch nicht darum, die 1 entgegen den üblichen mathematischen Gepflogenheiten als Primzahl zu definieren, sondern darum, die drei Universalkategorien als irreduzible semiotische Entitäten und somit mit den gleichen Eigenschaften, welche in der Mathematik die Primzahlen einnehmen, zu erweisen. Daß also Bense Z = (1, 2, 3) statt Z = (2, 3, 5) setzt, liegt einzig und allein daran, daß die drei Universalkategorien von Peirce als 1-, 2- und 3-stellige Relationen eingeführt worden waren.

2. Daß die Entscheidung, von einer Variante der Peano-Axiome auszugehen, die als Basisaxiom die Zahl 1 und nicht die Zahl 0 setzt, möglicherweise ein Fehlgriff war, beschäftigte Bense allerdings bereits zur selben Zeit, da er erstmals die Isomorphie von Peanozahlen und Primzeichen zu beweisen suchte, denn im gleichen Buch schlägt er vor, "disponible" bzw. "vorthetische" Objekte als 0-stellige Relationen einzuführen (Bense 1975, S. 65 ff.). Erstaunlich ist dabei, daß Bense offenbar nicht an die Möglichkeit gedacht hatte, daß man die Peanozahlen unter Benutzung des Satzes von Wiener und Kuratowski mit Hilfe der leeren Menge definieren kann. Dabei ist

$0 := Ø$

$1 := \{Ø\} = \{0\}$

$2 := \{Ø, \{Ø\}\} = \{0, 1\}$

$3 := \{Ø, \{Ø\}, \{Ø, \{Ø\}\}\} = \{0, 1, 2\}$, usw.

Da Bense (1979, S. 53 u. 67) die Zeichenrelation in einer Weise definierte, welche die folgende mengentheoretische Darstellung erlaubt

$Z = (M \subset ((M \subset O) \subset (M \subset O \subset I))$,

bekommen wir

$Z = (\{0\} \subset ((\{0\} \subset \{0, 1\}) \subset (\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}))$,

d.h. es ist möglich, die Zeichenrelation mit Hilfe von Peanozahlen zu definieren, die wiederum durch leere Mengen definiert sind.

3. Leider hat aber dieses Verfahren einen verhängnisvollen Haken, denn bei der Definition der benseschen Zeichenrelation mit Hilfe der durch den Satz von Wiener und Kuratowski definierten Peanozahlen sind wir von einem Axiomensystem der Peanozahlen ausgegangen, das nicht 1, sondern 0 als Basiszahl benutzt. Daraus folgt, daß die Definition

$Z = (\{0\} \subset ((\{0\} \subset \{0, 1\}) \subset (\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}))$

unvollständig ist, da die Zahl 0 nur als Element von Mengen, nicht aber als Zahl selbst auftritt. Z ist somit lediglich Teil der Definition eines Etwas, das wir vorerst durch X bezeichnen wollen und das wie folgt definiert ist

$X = (0 \subset (\{0\} \subset ((\{0\} \subset \{0, 1\}) \subset (\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}))))$,

und dieses 0 ist vermöge Bense (1975, S. 65) nichts anderes als das durch das Zeichen bezeichnete Objekt Ω, d.h. es gilt

$0 := Ø = Ω$.

Mit dem Satz von Wiener und Kuratowski bekommen wir daher sogleich

$1 := \{Ø\} = \{0\} = \{Ω\}$

$2 := \{Ø, \{Ø\}\} = \{0, 1\} = \{\{Ω\}\}$

$3 := \{Ø, \{Ø\}, \{Ø, \{Ø\}\}\} = \{0, 1, 2\} = \{\{\{Ω\}\}\}$,

also genau das Ergebnis, das wir in unserer Untersuchung des wissenschaftstheoretischen Stufenbaus von Ontik, Semiotik, Mathematik, Logik und Er-

kenntnistheorie bekommen hatten (vgl. Toth 2015), nämlich die Objekt-Hierarchie

$$\{\{\{\Omega\}\}\}$$
$$\uparrow$$
$$\{\{\Omega\}\}$$
$$\uparrow$$
$$\{\Omega\}$$
$$\uparrow$$
$$\Omega.$$

Da die Stufe $\{\{\{\Omega\}\}\}$ in Toth (2015) nicht berücksichtigt ist, geht also das Zeichen vermöge seines autoreproduktiv wirkenden drittheitlichen Interpretantenbezuges noch über Logik und Ontologie hinaus, denn wegen

$$\{\Omega\} = \mathrm{Z}$$

kann man die Objekthierarchie auch in der Form

$$\left.\begin{array}{c} \{\{\mathrm{Z}\}\} \\ \uparrow \\ \{\mathrm{Z}\} \\ \uparrow \\ \mathrm{Z} \end{array}\right\} \mathrm{Z} = (1, 2, 3)$$
$$\uparrow$$
$$\Omega$$

schreiben. Benses Zeichendefinition mit Hilfe seiner Primzeichen umfaßt darin also nur die durch die Spitzklammer markierte Teilhierarchie, der somit sozusagen der Kopf in Form des durch das Zeichen bezeichneten Objektes

fehlt. Der Grund dafür dürfte wiederum darin liegen, daß wir in der Peirce-Bense-Semiotik die paradoxale Situation haben, daß einerseits ein Objekt vorgegeben sein muß, bevor ein Zeichen als "Metaobjekt" (Bense 1967, S. 9) auf es abgebildet werden kann, daß andererseits aber das Objekt nach vollzogener thetischer Einführung des Zeichens nur noch als Objektbezug, d.h. als n-stellige Relation mit $n > 0$, existiert: eine notwendige Maßnahme, um das "semiotische Universum" (Bense 1983) als ein im modelltheoretischen Sinne abgeschlossenes zu definieren. Nur kann es leider keine Zeichen ohne Objekte geben, so, wie es umgekehrt auch keine Objekte ohne Zeichen geben kann. Wer den Teufel negiert, negiert auch Gott, wie "Pfarrer Braun" in einer Folge der gleichnamigen Serie sehr zurecht bemerkt hatte. Eine Semiotik ohne Ontik ist daher ein logischer Unsinn, denn in einem Universum, das nur aus Zeichen besteht, können diese gar nicht als solche erkannt, geschweige denn analysiert oder formalisiert werden, und die pansemiotische Theorie von Peirce und dem späten Bense ist somit keine Gegenwelt zur Welt der Objekte, sondern eine logisch ausgeschlossene Scheinwelt. In Wahrheit muß man also wiederum von unserem immer noch undefinierten X ausgehen, das gleichzeitig das bezeichnete Objekt und das es bezeichnende Zeichen ausgeht, d.h. wir haben zwei Möglichkeiten, X zu definieren

$\Omega^* = [\Omega, Z]$

$Z^* = [Z, \Omega]$,

und wir wollen die Entitäten, die durch die gestirnten Symbole bezeichnet wurden, als Systeme bezeichnen. Wie man leicht nachprüft, haben wir dann sofort

$\Omega^* = (0 \subset (\{0\} \subset ((\{0\} \subset \{0, 1\}) \subset (\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}))))$

$Z^* = (\{0\} \subset ((\{0\} \subset \{0, 1\}) \subset (\{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\})) \supset 0)$.

Literatur

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Toth, Alfred, Objekte, Zeichen und Metazeichen I-II. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

21.4.2015